A FAKTORIZÁLHATÓ CSOPORTOKRÓL

Írta: SZÉP JENŐ

Jelen ismertetés célja, hogy nagy vonalakban áttekintést adjon a faktorizálható csoportok terén eddig elért eredményekről. Természetesen egy ilyen rövid ismertetés keretében lehetetlen valamennyi eredményt elmondani, de még csak arról sem lehet szó, hogy valamennyi dolgozatot megemlítsem. Mindamellett igyekeztem a véleményem szerint érdeklődésre legjobban számottartó eredmények bemutatására — természetesen bizonyítások nélkül. A dolgozat végén részletes irodalomjegyzék nyújt további tájékozódási lehetőséget.

Egy G csoportot az $A_1, A_2, \ldots, A_r$ valódi alcsoportjai által faktorizálhatónak nevezünk és így jelöljük: $G = A_1A_2 \ldots A_r$, ha G minden eleme $a_1a_2 \ldots a_r$ ($a_i \in A_i$; $i = 1, \ldots, r$) alakban írható fel. A faktorizálható csoportok irodalma ma már elég nagy. Az általam nyilvántartott dolgozatok száma — amelyben a faktorizálható csoportok már fogalmilag is szerepelnek — meghaladja a 80-at. Ebben a számban nincsenek tehát benne olyan dolgozatok, mint pl. Frobenius egyik 1901-ben megjelent dolgozata, amely a következő jólismert eredményt tartalmazza: Ha a G csoportnak van olyan H alcsoportja, amely saját magának a normalizátora, továbbá a H csoport és konjugáltjai között bármely kettőnek a metszete az egységelem, akkor a kimaradt elemek (tehát azok, amelyek sem H-ban sem konjugáltjaiban nem szerepelnek) az egységelemmel együtt G-nek egy karakterisztikus alcsoportját adják. Ez más szóval azt jelenti, hogy $G = HN$, $(H \cap N = 1)$, ahol N G-nek egy karakterisztikus alcsoportja. Ha azonban ezeket a dolgozatokat is hozzávesszük az előbb említettekhez, akkor a faktorizálható csoportokkal foglalkozó dolgozatok száma becslésem szerint jóval meghaladja a 100-at.

Érdemes megemlíteni a fenti 80-as számot meghaladó dolgozatok időbeli eloszlását. Ezek közül 1950-ig mindössze 14 dolgozat jelent meg, amiből azonnal látható, hogy a faktorizálható csoportok tüzetesebb, sőt mondhatni rendszeresebb vizsgálata 1950-től kezdve indult meg.

Az első dolgozat, amelyik faktorizálható csoportokkal foglalkozik — tudomásom szerint — E. Maillet [37] egy 1900-ban megjelent dolgozata. Ez a dolgozat és két másik 1935-ben megjelent dolgozat (az egyik G. A. Millertől [39], a másik B. H. Neumanntól [40]) feltételeket állapítanak meg, amivel egy csoport két alcsoportja segítségével faktorizálható. Ezek a kritériumok csoportok permutáció — ill. substituciócsoportokkal való ábrázolására vannak kimondva. További alkalmazásukról nem tudok. 1928-ban és 1937-ben jelent meg P. Hallnak [18], [19] két dolgozata, amelyeket ma már a feloldható csoportokra vonatkozó klasszikus dolgozatok közé kell sorolnunk. Ennek egyik főeredményét így fogalmazhatjuk meg: egy véges csoport akkor és csak akkor feloldható, ha páronként felcserélhető prímhatványrendű alcsoportok szorzataként állítható elő. Ezen eredmény jelentősége elsősorban abban áll, hogy szoros kapcsolatot állapít meg a feloldható csoportok normálosztóstruktúrája és aritmetikai struktúrája között. A következő két dolgozat O. Oretól [42], [43] származik. Az egyik 1937-ben jelent meg, a másik 1938-ban. Ezekben a dolgozatokban már számos eredményt találhatunk a faktorizálható csoportok struktúráját illetően. Itt szerepel többek között a későbbi vizsgálatokban többször felhasznált következő tétel: Ha egy $G = AB$, $(A \cap B = D)$ fraktorizálható csoportban D tartalmazza A vagy B egy normálosztóját, akkor G nem egyszerű csoport. Ugyancsak ebben a dolgozatban vezeti be Ore a quasinormálosztó fogalmát (egy G csoport egy Q alcsoportját quasinormálosztónak nevezünk, ha Q G-nek minden alcsoportjával felcserélhető). A quasinormálosztóval kapcsolatban eddig már több dolgozat jelent meg, többek között Iwasawa [33] és Pic [44], [45] dolgozatai, amelyekben azon csoportok teljes leírása található, amelyeknek minden alcsoportja quasinormálosztó. Itt meg kell említenem, hogy az ilyen csoportok először Maillet már említett dolgozatában szerepelnek, ahol ezek feloldhatósága már igazolva van. Az 1950 előtti időből még három dolgozatot kell megemlítenem, amelyek az egyszeresen tranzitív permutációcsoportokkal kapcsolatban tárgyalnak néhány idetartozó kérdést. Ezek I. Schur [54] 1933-ban, H. Wielandt [76], 1935-ben és 1949-ben és R. Kochendörffer [35] 1937-ben megjelent egy-egy dolgozata.

A faktorizálható csoportokkal kapcsolatban felmerül az inverz probléma azaz a bővítésprobléma, amit röviden (két faktor esetében) így fogalmazhatunk meg: A, B és D csoportokhoz meghatározandók mindazon G csoportok, amelyekre $G = A'B'$, $(A' \cap B' = D')$ érvényes, ahol $A' \approx A$, $B' \approx B$, $D' \approx D$ fennállanak. Ezt a problémát először G. Zappa [82] oldotta meg (olyan értelemben, mint a Schreier-féle bővítésprobléma esetében) abban az esetben, amikor D' G-nek egységeleme. Abban az esetben, ha D' normálosztó G-ben a kérdést G. Casadio [4] intézte el. A probléma megoldásához Zappa bizonyos $a^b \in A$, $b^a \in B$ $(a \in A,\ b \in B)$ függvényeket vezet be, amelyek segítségével a ba szorzatot így definiálja: $ba = a^b . b^a$. Ennek felhasználásával megmutatja, hogy az ab formális szorzatok akkor és csak akkor alkotnak csoportot, ha az a^b, b^a függvényekre tett bizonyos kezdőfeltételek mellett a következő függvényegyenletek ki vannak elégítve:

$$a^{bb'} = (a^{b'})^b, \qquad b^{aa'} = (b^a)^{a'}$$

$$(aa')^b = a^b a'^{b^a}, \qquad (bb')^a = b^{a^{b'}} b'^a$$

Hasonló függvényegyenleteket nyert Casadio a másik említett esetben. Megvoltak tehát azok a függvényegyenletek, amelyek pl. a $G = AB$ $(A \cap B = 1)$ faktorizálható csoportokat és csakis ezeket reprezentálják és éppen ezért a faktorizálható csoportok általános struktúrájáról (legalábbis elméletileg) a legtöbbet nyújthatják. Hátra volt tehát a faktorizálható csoportok strukturális vizsgálata ezen függvényegyenletek segítségével, továbbá konkrét esetekben (adott komponensek esetében) a bővítésprobléma teljes megoldása.

1949-ben sikerült azután Z a p p ától függetlenül, de lényegében a Z a p p a-féle alapgondolatokból kiindulva strukturális következtetéseket vonnom [57,58] a faktorizálható csoportokra. Igy pl. sikerült megmutatni, hogy a

$$a^{bb'}=(a^b)^b,\quad b^{aa'}=(b^a)^{a'},\quad (aa')^b=a^b a'^b,\quad (bb')^a=b^a b'^a$$

függvényegyenletekkel definiált faktorizálható csoportok (amely egyenletrendszer speciális esete a Z a p p a-féle egyenletrendszernek) pontosan a következő faktorizálható csoportokat írják le: $G/A_1\times B_1\approx A/A_1\times B/B_1$, ahol A_1 ill. B_1 a maximális A-ban ill. B-ben levő normálosztója G-nek. Ugyancsak említésre méltó egy R é d e i-vel [48] közös eredményünk: A $G=AB$ ($A\cap B=1$) faktorizálható csoportra nézve az a^b függvények akkor és csak akkor határozzák meg egyértelműen a b^a függvényeket, ha sem A sem B nem tartalmazzák G-nek egy valódi normálosztóját. Más eredményeim ([59], [63]) pl.: Legyen $G=AB$ egy faktorizálható csoport, ahol A és B rendje egymáshoz relatív prím. Ha A egy p-csoport, vagy egy A b e l-féle csoport és B egy A b e l-féle csoport, akkor G feloldható. Ezen utóbbi eredmény azonban hamar túlhaladottá vált, amennyiben N. I t ô [28] 1951-ben bebizonyította, hogy ha a $G=AB$ faktorizálható csoportban az egyik faktor nilpotens csoport, a másik A b e l-féle vagy p-csoport, akkor a csoport feloldható. Még ugyanebben az évben H. W i e l a n d t [77] Itôtól függetlenül nyerte ugyanezeket az eredményeket, továbbá bebizonyította, hogy ha $A_1, A_2, \ldots, A_r$ páronként felcserélhető nilpotens csoportok és az $A_i A_k$ szorzatok feloldhatók, akkor a $G=A_1 A_2 \ldots A_r$ faktorizálható csoport is feloldható. Ezt kapcsolatba hozva az előbb említett eredményekkel adódik, hogy páronként felcserélhető olyan csoportok szorzata, amelyek közül az egyik nilpotens és a többi Abel-féle, feloldható. Nyílt maradt tehát még a kérdés, hogy két nilpotens csoportból faktorizálható csoport mindig feloldható e? Ilyen irányban egy nagy lépést jelent H. W i e l a n d t [78] egy legújabb dolgozata, amelyben igazolja, hogy két nilpotens csoportból faktorizálható csoport mindig feloldható, ha a két csoport rendje egymáshoz relatív prím. Érvényes tehát a következő tétel: Ha a G csoport páronként felcserélhető nilpotens csoportokból faktorizálható és ezen nilpotens csoportok rendje páronként relatív prím, akkor a G csoport feloldható. Ez az eredmény nyilvánvalóan szoros kapcsolatban áll Hall már említett tételével, amennyiben most a Hall-féle elegendő feltétel egy gyengítésével állunk szemben.

Az a kérdés, hogy két nilpotens csoport szorzata feloldható e, ha a tényezők rendjére semmiféle megszorítást nem teszünk, továbbra is nyílt. Ehhez kapcsolódva megemlítem még egy I t ô-val közös [67] eredményünket: Minden véges nem nilpotens csoport izomorf nilpotens csoportokból faktorizálható. Ezek a faktorok természetesen általában páronként nem cserélhetők fel.

Legyen szabad még két eredményt megemlítenem. Az egyik W i e l a n d t előbb említett dolgozatában található és a következőképpen hangzik: Legyen $G=A_1 A_2 \ldots A_k$ egy faktorizálható csoport, ahol az A_i csoportok ciklikus csoportok és páronként felcserélhetők. Ha $p_1 > p_2 > \cdots > p_r$ a G csoport rendjének valamennyi prímtényezője és P_ϱ a p_ϱ-hoz tartozó S y l o w-csoportja G-nek, akkor a $P_1, P_1P_2, \ldots, P_1P_2\ldots P_{k-1}$ csoportok G-nek normálosztói. A másik eredmény I t ô-nak [30] egy rövid és szellemes bizonyítása 1955-ből, amelyben megmutatja, hogy két A b e l-féle csoportból faktorizálható csoport metaabel-féle, azaz kommutátorcsoportja A b e l-féle.

A bővítésprobléma megoldás terén is szép eredmények születtek 1950 óta. Rédei [47] egy 1950-ben megjelent dolgozatában a Zappa-féle függvényegyenletek megoldása által előállítja valamennyi két ciklikus csoportból faktorizálható csoportot, amennyiben e kettőnek a metszete az egységelem, ha legalább az egyik végtelen rendű, továbbá teljesül a következő feltétel: Létezik olyan $a \in A$, $b \in B$ elempár (A és B a megadott ciklikus csoportok), hogy az $a^b = a$, $b^a = b$ egyenlőségek közül legalább az egyik teljesül. P. M. Cohn [9] egy 1956-ban megjelent dolgozatában azután megmutatta, hogy az említett feltétel bármely a bővítésprobléma megoldását jelentő csoportban fennáll. A Rédei által előállított megoldások így valamennyit jelentik. Véges ciklikus csoportokból faktorizálható csoportok között a p-csoportok jelentik az első és egyszersmind a nehezebb problémát. Ezzel a kérdéssel foglalkozik B. Huppert [22] egy 1953-ban megjelent dolgozatában. Páratlan p esetében a kérdést maradéktalanul elintézi, $p=2$ esetben azonban a probléma még ma sincs teljesen elintézve, jóllehet Huppert dolgozatán kívül a további években N. Itô [31] és A. Ohara [32] dolgozatai révén ezen csoportok számos tulajdonsága vált ismeretessé. Teljesség kedvéért megemlítem még, hogy két véges ciklikus csoportból faktorizálható csoportokkal J. Douglas [13, 14] már 1951-ben két dolgozatban is foglalkozott. Legújabban K. R. Yacoub [81] abban az esetben, ha az egyik csoport rendje p^2 (p páratlan prímszám) Huppert-től eltérően egészen elemi úton, lényegében a Zappa-féle relációkra támaszkodva adja valamennyi bővített csoportot.

Az eddigi ismertetésben csaknem kizárólag feloldható faktorizálható csoportokról volt szó. A faktorizálható csoportok között azonban nem feloldható csoportok is vannak, sőt könnyen igazolható, hogy végtelen sok faktorizálható egyszerű csoport létezik. Fontos kérdést jelent a nem egyszerű faktorizálható csoportok vizsgálata, pontosabban olyan csoportosztályok megjelölése, amelyek nem egyszerűek. Eddig a faktorizálható csoportok több típusáról volt már szó, amelyek nem egyszerűek, sőt feloldhatók. Olyan faktorizálható csoportokkal kapcsolatban, amelyek nem egyszerűek, de nem szükségképpen feloldhatók, csupán egy eredményt szeretnék ismertetni, amelyet 1955-ben sikerült [65] bebizonyítani: Ha a $G=AB$ faktorizálható csoportban A Abel-féle csoport és B-nek van valódi centruma, továbbá A rendje nem kisebb B rendjénél, akkor G nem egyszerű. Valószínűnek látszik, hogy az állítás a rendekre való kikötés nélkül is igaz, ez a kérdés azonban még nyílt.

Megemlítem még egy Rédei-vel közös 1950-ben megjelent dolgozatunkat [68], amelyben Ore idézett tétele egy viszonylag könnyen igazolható és a faktorizálható csoportokra vonatkozó általános struktúratételből könnyen nyerhető.

Külön említést érdemel, hogy Schur [55] ismert tételének (ha a G véges csoportnak van olyan N normálosztója, hogy $(|N|, |G/N|)=1$, akkor $G=NM$ $(N \cap M=1)$, ahol $|M|=|G/N|$) végtelen csoportokra való kiterjesztésével kapcsolatban Černikov-nak [5, 6, 7, 8], Hall már idézett tételeivel kapcsolatban pedig Čunichin-nak [10, 11, 12] jelentek meg dolgozatai.

A bővítésprobléma elvi megoldásával kapcsolatban eddig csak Zappa és Casadio dolgozatairól volt szó. A bővítésprobléma általános megoldását két tényező esetében (ahol a metszetre nézve semmiféle kikötést nem teszünk) Rédei-vel [50] egy közös 1955-ben megjelent dolgozatban tárgyaljuk. A megoldást ebben az esetben is négy függvényegyenlet szolgáltatja.

A faktorizálható csoportokra vonatkozó bővítésprobléma elvi megoldása után felmerült a kérdés, nem lehetne e két csoporthoz egy olyan bővítésproblémát megfogalmazni és természetesen megoldani, amelyik speciális esetként tartalmazza mind a Zappa-féle problémát, mind a Schreier-féle bővítésproblémát. Ezt a kérdést oldja meg Rédei [48] egy 1950-ben megjelent dolgozatában, amelyben bevezeti két csoport u. n. ferde szorzatát. Legyen G és Γ két tetszőleges csoport $a \in G$ és $\alpha \in \Gamma$ elemekkel. Jelöljük $G \circ \Gamma$-val az (a, α) elempárokkal képezett u. n. ferde szorzatot, amely a következőképpen van definiálva: $(a, \alpha)(b, \beta) = (a b^{\alpha} \beta^{\alpha}, a^{b} \alpha^{b} \beta)$. Itt b^{α}, $\beta^{\alpha} \in G$; a^{b}, $\alpha^{b} \in \Gamma$ bizonyos egyértékű függvények. Rédei ezen függvényekre megállapítja annak a szükséges és elegendő feltételét, amivel a $G \circ \Gamma$ ferde szorzat csoport. A $G \circ \Gamma$ ferde szorzat k-szorosan elfajult aszerint, hogy a $b^{\alpha} = b$, $\beta^{\alpha} = e$, $a^{b} = \varepsilon$, $\alpha^{b} = \alpha$ relációkból k azonosan teljesül (e G-nek, E Γ-nak egységeleme). Lényegében négy különböző kétszeresen elfajult eset van. A Schreier-féle eset, valamint a Zappa-féle eset a kétszeresen elfajult ferde szorzatok között található. A másik két kétszeresen elfajult esetet R. Kochendörffer [36] egy 1953-ban megjelent dolgozatában vizsgálta ki részletesen. Ezek a ferde szorzatok is lényegében a Schreier-féle és a Zappa-féle bővítésekből tehetők össze. F. Rühs [52] egy 1957-ben megjelent dolgozatában teljesen elintézi az egyszeresen elfajult esetet, ez is összetehető a Schreier- és Zappa-féle bővítésekből. Végül 1958-ban Rühs [53] részben és még ugyanebben az évben tőle függetlenül C. M. Tibiletti [74] teljesen elintézi az általános esetet. Lényegesen új bővítés itt sem állott elő. Tibiletti eredménye a következő: Ha G egy ferde szorzattal előállított csoport, akkor G két alcsoportjával faktorizálható a következőképpen: $G = HK$, $H \cap K = D$ ahol $D = H_1 \times K_1$ és H_1 ill. K_1 normálosztója H-nak ill. K-nak. Elintéződött tehát az a kérdés — negatív értelemben —, hogy a Rédei-féle ferde szorzat ad e a Schreier-féle és a Zappa-féle bővítésekből össze nem tehető bővítéseket.

Legújabban sikerült a Schreier-féle és a Zappa-féle bővítésprobléma megoldását egy olyan egészen általános bővítésproblémából származtatni, amelybe már minden csoport beletartozik [66, 83].

A Rédei-féle ferde szorzattal analóg problémát operátorcsoportok esetén L. Fuchs [15, 16] vizsgálta 1952-ben.

Összefoglalásul megállapítható, hogy a faktorizálható csoportok vizsgálata lényegében három vonalon történik. Az egyik a szorosan vett strukturális vizsgálat általában a csoportelmélet klasszikus eredményeire támaszkodva és klasszikus módszerekkel. A másik vonal konkrét csoportok esetében a bővítésprobléma explicit megoldása. A harmadik vonal a faktorizálható csoportoknak függvényegyenletekkel való leírása és ezen függvényegyenletek felhasználása az előbbi két vonal problémakörében.

IRODALOM

[1] R. Baer, The cohomoloqy theory of a pair of groups, Procedings of the International Congress of Mathematicians, Cambridge, Mass., 1950, 2 (1952) 15—20.

[2] R. Baer, Factorisation of n-soluble and n-nilpotent groups, Proc. Amer. Math. Soc. 4 (1953), 15—26.

[3] N. Blackburn, Über das Produkt von zwei zyklischen 2-Gruppen, Math. Z. 68 (1957), 422—427.

[4] G. Casadio, Construzione di gruppi come prodotto di sottogruppi permutabili, Rend. Math. e Appl. (V) 2 (1941), 348—360.

[5] S. N. Černikov, Groups with systems of complementary subgroups, Doklady Akad. Nauk. SSSR 92 (1953), 891—894.

[6] S. N. Černikov, Groups with systems of complementary subgroups, Mat. Sb. 35 (1954), 93—128.

[7] S. N. Černikov, On complementability of Sylow π-subgroups in certain classes of infinite groups, Doklady Akad. Nauk. SSSR, 102 (1955), 457—459.

[8] S. N. Černikov, On complementation of the Sylow π-subgroups in some classes of infinite groups, Mat. Sb. 37 (1955) 557—566.

[9] P. M. Cohn, A remark on the general produkt of two infinite cyclic groups, Arch. Mat. 7. (1956), 94—99.

[10] S. A. Čunichin, Über die Zerlegung π-trennbarer Gruppen in ein Produkt von Untergruppen, Doklady Akad. Nauk SSSR, 95 (1954), 725—727.

[11] S. A. Čunichin, Die π-Faktorisierung endlicher Gruppen , Mat. Sbornik, 43 (1957), 49—66.

[12] S. A. Čunichin, Permutability of factors in π-factorisations of finite groups, Doklady Akad. Nauk SSSR, 119 (1958), 888—889.

[13] J. Douglas, On finite groups with two independent generators, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 37 (1951), 604—610

[14] J. Douglas, On finite groups with two independent generators, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 37 (1951), 677—691.

[15] L. Fuchs, The Zappa extension of partially ordered groups, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 55 (1952), 363—368.

[16] L. Fuchs, Rédeian skew produkt of operator groups, Acta Sci. Math. Szeged, 14 (1952), 228—238.

[17] K. W. Gruenberg, A note a theorem of Burnside, Proc. Cambridge phil. Soc. 48 (1952), 202.

[18] P. Hall, A note on soluble groups, J. London Math. Soc. 3 (1928), 98—105.

[19] P. Hall, A characteristic property of soluble groups, J. London Math. Soc. 12 (1937), 198—200.

[20] P. Hall, Complemented groups, J. London Math. Soc. 12 (1937), 201—204.

[21] P. Hall, On the Sylow systems of a soluble groups, Proc. London Math. Math. Soc. 43 (1937), 316—323.

[22] B. Huppert, Über das Produkt von paarweise vertausbaren zyklischen Gruppen, Math. Z. 58 (1953), 243—264.

[23] B. Huppert, Über die Auflösbarkeit faktorisierbarer Gruppen, Math. Z. 59 (1953), 1—7.

[24] B. Huppert, Über Produkte von endlichen Gruppen, Wiss. Z. Humboldt-Univ. Berlin, Mat. Nat. Reihe 3 (1954), 363—364.

[25] B. Huppert — N. Itô, Über die Auflösbarkeit faktorisierbarer Gruppen II, Math. Z. 61 (1954), 94—99.

[26] T. Ikuta, On the factorisable groups I, II, Rep. Liberal Arts Fac. Schizuoka Univ. No. 5, 6 (1954).

[27] T. Ikuta, Über die Normalisatoren der Untergruppen von einem Zappaschen Produkt von zwei Gruppen, Rep. Liberal Arts Fac. Schizuoka Univ. 8 (1955).

[28] N. Itô, Remarks on factorisable groups, Acta Sci. Math. Szeged 14 (1951), 83—84.

[29] N. I t ô, On the factorisation of the linear fractional groups $LF(2, p^n)$, Acta Sci. Math. Szeged, 15 (1953), 79—84.
[30] N. I t ô, Über das Produkt von zwei abelschen Gruppen, Math. Z. 63 (1955), 400—401.
[31] N. I t ô, Über das Produkt von zwei zyklischen 2-Gruppen, Publ. Math. Debrecen 4 (1956), 517—520.
[32] N. I t ô — A. Ohara, Sur les groups factorisables par deux 2-groupes cycliques I, II, Proc. Japan Acad. 32 (1956), 736—740, 741—743.
[33] K. I w a s a w a, Über die endlichen Gruppen und die Verbände ihrer Untergruppen, Journal of Univ. of Tokyo 4—3 (1941), 171—199.
[34] M. I. K o r g a p o l o v, Factorisation of π-separable groups, Doklady Akad. Nauk SSSR 114 (1957), 1155—1157.
[35] R. K o c h e n d ö r f f e r, Unterzuchungen über eine Vermutung von W. Burnside, Schr. Math. Semin. u. Inst. angew. Math. Univ. Berlin, 3 (1937), 155—180.
[36] R. K o c h e n d ö r f f e r, Zur Theorie der Rédeischen schiefen Produkte, J. Reine Angew. Math. 192 (1953), 96—101.
[37] E. M a i l l e t, Sur les groupes échangeables et les groupes decomposables, Bull. Soc. Math. France, 28 (1900), 7—16.
[38] D. M a n n i n g, On simply transitive groups with transivite Abelian subgroups of the same degree, Trans. Amer. Math. Soc. 40 (1936), 324—342.
[39] G. A. M i l l e r, Groups which are the products of two permutable proper subgroups, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 21 (1935), 469—472.
[40] B. H. N e u m a n n, Decomposition of groups, J. London Math. Soc. 10 (1935), 3—6.
[41] A. O h a r a, Note on commutator subgroups of factorisable groups, Proc. Japan Acad. 31 (1955), 612—614.
[42] O. O r e, Structures and group Theory I, II. Duke Math. J. 3 (1937), 149—174 (1938), 247—265.
[43) O. O r e, Contributions to the theory of finite order, Duke Math. J. 5 (1938), 431—460.
[44] G. P i c, Despre struktura grupurilor quasihamiltoniene, Buletin Stiintific Acad. R. P. R. I (1949), 973—979.
[45] G. P i c, Despre grupurile quasihamiltoniene infinite, Studii si Certari Stiintifice, II (1951), 43—49.
[46]. G. P i c, Despre quasi-centrul unui grup, Studii si Centari Mat. IV (1953), 7—21.
[47] L. R é d e i, Zur Theorie der faktorisierbaren Gruppen I, Acta Sci. Math. Hungar. 1 (1950), 74—98.
[48] L. R é d e i, Die Anwendung des schiefen Produktes in der Gruppentheorie, J. Reine Angew. Math. 188 (1950), 201—228.
[49] L. R é d e i, — A. Stöhr, Über ein spezielles schiefes Produkt in der Gruppentheorie, Acta Sci. Math. Szeged, 15 (1953), 7—11.
[50] L. R é d e i, — J. Szép, Die Verallgemeinerung der Theorie des Gruppenproduktes von Zappa — Casadio, Acta Sci. Math. Szeged 16 (1955), 165—170.
[51] F. R ü h s, Über ein spezielles Rédeisches schiefes Produkt in der Gruppentheorie, Acta Sci, Math. Szeged, 16 (1955), 160—164.
[52] F. R ü h s, Über die einfach ausgearteten Rédeischen schiefen Produkte, J. Reine angew. Math. 198 (1957), 81—86.
[53] F. R ü h s, Über das allgemeine Rédeische schiefe Produkt, J. reine angew. Math. 200 (1958, 99—111.
[54] I. S c h u r, Zur Theorie der einfach transitiven Permutationsgruppen, S. B. Preuss. Akad. Wiss. 18/20 (1933), 598—623.
[55] I. S c h u r-, — Zassenhaus, The Theory of Groups, (1958), Ch. IV. Theorem 25.
[56] W. R. S c o t t, Solvable factorisable groups, Illinois I. Math. 1 (1957), 389—394.
[57] J. S z é p, Über die als Produkt zweier Untergruppen darstellbaren endlichen Gruppen, Comment. Math. Helv. 22 (1949), 31—33.

[58] J. Szép, On the Strukture of groups, which can be represented as the product of two subgroups, Acta Sci. Math. Szeged 12 A (1950), 57—61.
[59) J. Szép, On factorisable not simple groups, Acta Sci. Math. Szeged 13 (1950), 239—241.
[60] J. Szép, On factorisable simple groups, Acta Sci. Math. Szeged, 14 (1952), 22.
[61] J. Szép, Zur Theorie der endlichen einfachen Gruppen, Acta Sci. Math. Szeged 14 (1952), 111—112.
[62] J. Szép, Zur Theorie der einfachen Gruppen, Acta Sci. Math. Szeged 14 (1952), 246.
[63] J. Szép, Zur Theorie der faktorisierbaren Gruppen, Publ. Math. Debrecen 2 (1951), 43—45.
[64] J. Szép, Véges egyszerű csoportokról, Comptes rendus du I, congres des math. hongrois (1951), 461—463.
[65] J. Szép, Zur Theorie der faktorisierbaren Gruppen, Acta Sci. Math. Szeged 16 (1955), 54—57.
[66] J. Szép, Über eine allgemeine Erweiterung von Gruppen I, II, Publ. Math. 6 (1959), 60—71, im Erscheinen.
[67] J. Szép — N. Itô, über die Faktorisation von Gruppen, Acta Sci. Math. Szeged 16 (1955), 229—231.
[68] J. Szép, — L. Rédei, On factorisable groups, Acta Sci. Math. Szeged 13 (1950), 235—238.
[69] C. M. Tibiletti, Sul prodotto die gruppi permutabili, Ann. Mat. Pura Appl. Ser. IV, 43 (1957) 341—356.
[70] C. M. Tibiletti, Immersione in prodotti completi di prodotti ordinati di piu gruppi, Annali di Mat. Pura Appl. Ser. IV. Tom. XLIV (1957), 233—244.
[71] C. M. Tibiletti, Sui minimi prodotti completi contenenti prodotti di gruppi permutabili, Annali Mat. Pura Appl. Ser IV. Tom. XLIV (1957), 251—259.
[72] C. M. Tibiletti, Sui prodotti completi contenenti prodotti di gruppi permutabili, Annali Mat. Pura Appl. Ser. IV. Tom. XLIV (1957), 153—170.
[73] C. M. Tibiletti, Sul prodotto di gruppi permutabili, Annali Mat. Pura Ser. IV. Tom. XLIII (1957), 341—356.
[74] C. M. Tibiletti, Una scomposizione del prodotto sghembo di Rédei, Rendiconti del Sem. Mat. di Torino, Vol. 17 (1958), 209—221.
[75] C. M. Tibiletti, Sui prodotti ordinati di gruppi finiti, Boll. U. M. I. (3), Vol 13, 46—57.
[76] H. Wielandt, Zur Theorie der einfach transitiven Permutationsgruppen I, Math. Zeitschrift 40 (1935), 582—587, und II, Math. Zeitschrift. 52 (1949), 384—393.
[77] H. Wielandt, Über das Produkt paarweise vertauscharer nilpotenter Gruppen, Math. Z. 55 (1951), 17.
[78] H. Wielandt, Über Produkte von nilpotenten Gruppen, Illinois J. of. Math. 2 (1958), 611—618.
[79] K. R. Yacoub, General products of two finite cyclic groups, Proc. Glasgow Math. Assoc. 2 (1955), 116—123.
[80] K. R. Yacoub, A thesis on general products of two cyclical groups, London University (1953).
[81] K. R. Yacoub, On the general products of two finite cyclic groups one of which being of order p^2. Publ. Math. Tom 6 (1959), 26—39.
[82] G. Zappa, Sulla construzione die gruppi di due dati sottogruppi permutabili tra loro, Atti 2, Congr. Un. Math. Ital. (1942), 119—125.
[83] J. Zvonimir, Szépsche Erweiterung von Gruppen mit Operatoren, Matematicko-fizicki glasnik, Zagreb, (im Erscheinen).

О ВЗАИМОЗАМЕНЯЕМЫХ ГРУППАХ

И. Сеп

Автор дает краткий обзор о главнейших достижениях, появившихся с 1900 до наших дней в области взаимозаменяемых групп

ÜBER FAKTORISIERBARE GRUPPEN

von

J. SZÉP

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, einen Überblick über die Resultate zu geben, die in der Theorie der faktorisierbaren Gruppen bis heute erzielt worden sind. Natürlich ist es nicht möglich, in den Rahmen eines derartigen kurzgefassten Berichtes sämtliche diesbezügliche Resultate aufzuzählen oder auch nur alle einschlägige Arbeiten zu erwähnen. Ich habe jedoch danach getrachtet, diejenigen Resultate darzulegen, die meines Erachtens am meisten Interesse verdienen — natürlich ohne Beweise.

Eine Gruppe G wird als durch ihre echten Untergruppen $A_1, A_2, \ldots, A_r$ faktorisierbar bezeichnet und in der Form $G = A_1 A_2 \ldots A_r$ geschrieben, falls jedes seiner Elemente in der Form $a_1 a_2 \ldots a_r$ $(a_i \in A_i;\ i = 1, \ldots, r)$ geschrieben werden kann. Die faktorisierbaren Gruppen haben heute bereits ein ziemlich umfangreiches Schrifttum. Die Anzahl der mir bekannten Arbeiten beläuft sich auf mehr als 80. Dabei bezieht sich diese Angabe lediglich auf Arbeiten in welchen der Begriff der faktorisierbaren Gruppe explizit auftritt, d. h. es werden solche Veröffentlichungen nicht mitgerechnet wie z. B. die Arbeit von F r o b e n i u s aus dem Jahre 1901 in welchem folgendes Resultat enthalten ist: Hat die Gruppe G eine Untergruppe H, welche Normalisator von sich selbst ist, und sind weiterhin die Gruppe und die Konjugierten derselben so beschaffen, dass der Durchschnitt zweier beliebiger von diesen Gruppen gleich dem Einselement ist, dann bilden die übriggebliebenen Elemente (d. h. diejenigen Elemente die weder in H noch in irgendwelcher Konjugierten von H auftreten) unter Hinzunahme des Einselementes eine charakteristische Untergruppe von G. Dies bedeutet mit anderen Worten, dass $G = HN$ $(H \cap N = 1)$ gilt, wobei N eine charakteristische Untergruppe von G ist. Falls wir auch Arbeiten solcher Art zu den oben erwähnten hinzufügen, so beträgt meiner Schätzung nach die Anzahl der Arbeiten die sich mit faktorisierbaren Gruppen beschäftigen, mehr als hundert.

Interessant ist dabei die zeitliche Verteilung der Arbeiten welche ausser die oben erwähnte Anzahl von 80 fallen. Bis 1950 sind nämlich von diesen Arbeiten lediglich 14 erschienen, woraus man unmittelbar ersieht, dass eine mehr eingehende, vielleicht dürfen wir auch sagen, eine mehr systematische Untersuchung der faktorisierbaren Gruppen erst um 1950 seinen Anfang genommen hat.

Die erste Arbeit, die sich mit faktorisierbaren Gruppen beschäftigt, ist meines Wissens eine in 1900 erschienene Arbeit von E. M a i l l e t [37]. In derselben, sowie in zwei anderen, in 1935 erschienenen Arbeiten (die eine von G. A. M i l l e r [39], die andere von B. H. N e u m a n n [40]), werden Bedingungen aufgestellt, unter welchen eine Gruppe mit Hilfe zweier seiner Untergruppen faktorisierbar ist. Diese Kriterien werden für die Darstellungen von Gruppen mit Hilfe von Permutations-bzw. Substitutionsgruppen ausgesprochen. Weitere Anwendungen derselben sind mir nicht bekannt. Im Jahre 1928 und 1937 sind zwei Arbeiten von P. H a l l [18, 19] erschienen, welche wir heute bereits zu den klassischen Arbeiten über auflösbare Gruppen rechnen dürfen. Eines der Hauptergebnisse dieser Arbeiten lässt sich auf folgende Weise formulieren: Eine endliche Gruppe ist dann und nur dann auflösbar, falls sie sich als Produkt von paarweise vertauschbaren Untergruppen von Primzahlpotenzordnung darstellen lässt. Die Bedeutung dieses Ergebnisses besteht vor allem darin, dass es zwischen der Normalteilerstruktur und der arithmetischen Struktur der auflösbaren Gruppen einen engen Zusammenhang feststellt. Die darauffolgenden beiden Arbeiten stammen von O. O r e [42, 43]. Eine derselben ist in 1937, die andere in 1938 erschienen. Diese Arbeiten enthalten bereits eine Anzahl Resultate über die Struktur der faktorisierbaren Gruppen. Hier tritt unter anderem der folgende, in späteren Untersuchungen mehrmals benutzte Satz auf: Enthält in einer faktorisierbaren Gruppe $G=AB(A\cap B=D)$ der Durchschnitt D einen Normalteiler von A oder von B, dann ist die Gruppe nicht einfach. Auch den Begriff des Quasinormalteilers führt Ore in dieser seiner Arbeit ein. (Eine Untergruppe Q einer Gruppe G wird ein Quasinormalteiler genannt, falls Q mit jeder Untergruppe von G vertauschbar ist.) Der Begriff des Quasinormalteilers ist bereits in mehreren Arbeiten behandelt worden, so unter anderem in denjenigen von K. Iwasawa [33] und G. Pic [44, 45], welche eine vollständige Beschreibung derjenigen Gruppen enthalten, in welchen jede Untergruppe Quasinormalteiler ist. Hierbei muss ich erwähnen, dass solche Gruppen zuerst bei Maillet aufgetreten sind, der z. B. auch die Auflösbarkeit derselben bewiesen hat. — Ich muss noch drei Arbeiten aus dieser Zeit erwähnen, welche bezüglich der einfach transitiven Permutationsgruppen einige hierher gehörige spezielle Fragen erörtern. Es handelt sich dabei um je eine Arbeit von I. Schur [54] (1933), H. Wielandt [76] (1935 und 1949), sowie R. Kochendörffer [35] (1937).

Für faktorisierbare Gruppen tritt das inverses Problem, d. h. das Erweiterungsproblem auf, welches wir (für den Fall von zwei Faktoren) kurz so formulieren können: Für gegebene Gruppen A, B und D sollen sämtliche Gruppen G bestimmt werden, für welche $G=A'B'(A'\cap B'=D')$ gilt, wobei $A'\approx A, B'\approx B$, und $D'\approx D$ ist. Dieses Problem ist zuerst durch G. Zappa [82] (in demselben Sinne wie im Falle des Schreierschen Erweiterungsproblems) für den Fall gelöst worden, da D' das Einselement von G ist. Für den Fall eines beliebigen Normalteilers D' von G wurde die Frage durch G. Casadio [4] erledigt. Zur Lösung des Problems führt Zappa gewisse Funktionen $a^b\in A, b^a\in B(a\in A, b\in B)$ ein, mit Hilfe deren er das Produkt ba durch $ba=a^b b^a$ definiert. Unter Anwendung dieser Formel zeigt er dann, dass die formalen Produkte ab dann und nur dann eine Gruppe bilden, falls bei gewissen, den Funktionen a^b, b^a auferlegten Anfangsbedingungen die folgenden Funktionalgleichungen gelten:

$$a^{bb'}=(a^{b'})^b, \quad b^{aa'}=(b^a)^{a'}$$

$$(aa')^b=a^b a'^{b^a}, \quad (bb')^a=b^{a^{b'}} b'^a.$$

Ähnliche Funktionalgleichungen hat auch Casadio im anderen von uns erwähnten Fall gewonnen. Weder Zappa, noch Casadio verwenden die von ihnen aufgestellten Funktionalgleichungen zur Untersuchung der Struktur der faktorisierbaren Gruppen, auch gewinnen sie mit Hilfe derselben keine dem Erweiterungsproblem entsprechende neue Gruppen.

Im Jahre 1949 ist es dann gelungen, unabhängig von Zappa, aber im wesentlichen von den Zappaschen Grundgedanken ausgehend, für auflösbare Gruppen strukturelle Folgerungen zu ziehen [57, 58]. So ist es z. B. gelungen zu zeigen, dass die durch das Funktionalgleichunssystem

$$a^{bb'}=(a^{b'})^b, b^{aa'}=(b^a)^{a'}, (aa')^b=a^b a'^b, (bb')^a=b^a b'^a.$$

definierten faktorisierbaren Gruppen (dieses Gleichungssystem stellt einen Spezialfall des Zappaschen dar) genau mit den folgenden zusammenfallen: $G/A_1\times B_1\approx A/A_1\times B/B_1$ wobei A_1 bzw. B_1 je einen maximalen in A bzw. B enthaltenen Normalteiler von G bedeuten. Auch ein von mir in Zusammenarbeit mit Rédei [48] erzieltes Resultat verdient hier erwähnt zu werden: Für die faktorisierbare Gruppe $G=AB$ $(A\cap B=1)$ werden die Funktionen a^b dann und nur dann durch die Funktionen b^a eindeutig bestimmt, falls weder A noch B einen Normalteiler von G enthält.

Andere Ergebnisse sind [59, 63] z. B. die folgenden: Es sei $G=AB$ eine faktorisierbare Gruppe, wobei die Ordnungen von A und B zueinander relativ prim sind. Ist A eine p-Gruppe oder eine Abelsche Gruppe und B eine Abelsche Gruppe, dann ist G auflösbar. Dieses letztere Ergebnis ist jedoch binnen Kürze überholt worden, N. Itô [28] hat nämlich in 1951 bewiesen, dass wenn in der faktorisierbaren Gruppe $G=AB$ der eine Faktor eine nilpotente Gruppe, der andere aber eine Abelsche oder eine p-Gruppe ist, dann ist die Gruppe auflösbar. Die gleichen Resultate sind in demselben Jahre unabhängig von Itô auch durch H. Wielandt [77] erzielt worden; er bewies auch dass im Falle wo $A_1, A_2, \ldots, A_r$ paarweise vertauschbare nilpotente Gruppen und die Produkte $A_i A_k$ auflösbar sind, auch die faktorisierbare Gruppe $G=A_1A_2\ldots A_r$ auflösbar ist. Daraus ergibt sich, unter Zuhilfenahme der soeben erwähnten Ergebnisse, dass das Produkt von paarweise vertauschbaren Gruppen, von denen die eine nilpotent ist während die übrigen Abelsch sind, auflösbar ist. Es bleibt also noch die Frage offen, ob eine in zwei nilpotente

Gruppen faktorisierbare Gruppe stets auflösbar ist? Einen wichtigen Schritt in diester Richtung bedeutet eine neue Arbeit von H. Wielandt [78], in welcher der Nachweis erbracht wird, dass eine durch zwei nilpotente Gruppen faktorisierbare Gruppe stets auflösbar ist, falls nur die Ordnungen der beiden Gruppen zueinander relativ prim sind. Es gilt also der folgende Satz: Ist die Gruppe G durch paarweise vertauschbare nilpotente Gruppen faktorisierbar und sind die Ordnungen dieser nilpotonten Gruppen paarweise relativ prim, so ist die Gruppe G auflösbar. Dieses Ergebnis steht mit dem bereits erwähnten, als klassisch anzusehenden Satz von Hall offenbar in engem Zusammenhang, insofern als es sich hier um eine Abschwächung der Hallschen hinreichenden Bedingung handelt.

Die Frage, ob das Produkt zweier nilpotenter Gruppen auflösbar ist, falls wir über die Ordnungen der Faktoren nichts voraussetzen, bleibt auch weiterhin offen. Im Zusammenhang damit erwähne ich noch ein Resultat das ich gemeinsam mit Itô [67] erzielt habe: Jede endliche nichtnilpotente Gruppe lässt sich durch isomorphe nilpotente Gruppen faktorisieren. Natürlich sind letztere im allgemeinen nicht paarweise vertauschbar.

Ich möchte noch zwei Resultate erwähnen. Eines derselben ist in der obenerwähnten Arbeit von Wielandt enthalten, und besagt folgendes: Es sei $G = A_1 A_2 \ldots A_r$ eine faktorisierbare Gruppe, wobei die A_i zyklische Gruppen und paarweise vertauschbar sind. Sind $p_1 > p_2 > \cdots > p_r$ sämtliche Primfaktoren der Ordnung von G und ist P_ϱ die zu p_ϱ gehörige Sylowgruppe von G, dann sind die Gruppen $P_1, P_1 P_2, \ldots, P_1 P_2 \ldots P_{r-1}$ Normalteiler von G. — Das andere Ergebnis ist ein kurzer und geistreicher Beweis von Ito [30] aus dem Jahre 1955, durch welchen er zeigt dass eine durch zwei Abelsche Gruppen faktorisierbare Gruppe metaabelsch ist, d. h. eine Abelsche Kommutatorgruppe besitzt.

Auch was die Lösung des Erweiterungsproblemes betrifft, sind seit 1949 schöne Ergebnisse erzielt worden. In einer in 1950 erschienenen Arbeit gibt Rédei [47] mittels Lösung der Zappaschen Funktionalgleichungen eine Darstellung sämtlicher durch zwei zyklische Gruppen faktorisierbarer Gruppen, für den Fall wo der Durchschnitt der beiden Gruppen mit dem Einselement zusammenfällt, mindestens eine derselben eine unendliche Ordnung hat, und die folgende Bedingung erfüllt ist: Es gibt ein Elementenpaar $a \in A$, $b \in B$ (A und B sind die gegebenen zyklischen Gruppen) derart, dass mindestens eine der Gleichungen $a^b = a$, $b^a = b$ erfüllt ist. In einer in 1956 erschienenen Arbeit hat dann P. M. Cohn [9] gezeigt, dass diese Bedingungen in jeder dem Erweiterungsproblem entsprechenden Gruppe erfüllt sind. Die von Rédei gefundenen Lösungen stellen also überhaupt sämtliche Lösungen dar.

Unter den Gruppen die durch endliche zyklische Gruppen faktorisierbar sind, bedeuten die p-Gruppen das erste und zugleich das schwerere Problem. Mit diesem Problem beschäftigt sich B. Huppert [22] in einer in 1953 erschienenen Arbeit. Für ungerades p gelingt es ihm, das Problem restlos zu erledigen, im Falle $p = 2$ ist aber das Problem auch heute noch nicht vollständig gelöst, obwohl in den letzten Jahren ausser der erwähnten Arbeit von Huppert auch Arbeiten von N. Ito [31] und A. Ohara [32] viele Eigenschaften dieser Gruppen aufgedeckt haben. — Der Vollständigkeit halber erwähne ich noch, dass durch zwei endliche zyklische Gruppen faktorisierbare Gruppen bereits in 1951 in zwei Arbeiten von J. Douglas [13, 14] behandelt worden sind. Neuerdings ist es K. R. Yacoub [81] gelungen, im Falle wo die Ordnung einer der Gruppen gleich p^2 ist (p: eine ungerade Primzahl) auf einem von dem Huppertschen verschiedenen ganz elementarem Wege, nur unter Anwendung der Zappaschen Relationen, sämtliche Erweiterungsgruppen anzugeben.

Im bisheringen Laufe unserer Darlegungen haben wir uns so gut wie ausschliesslich mit auflösbaren faktorisierbaren Gruppen beschäftigt. Unter den faktorisierbaren Gruppen gibt es aber auch solche die nicht auflösbar sind, und man kann sogar ohne Schwierigkeit beweisen, dass es unendlich viele faktorisierbare einfache Gruppen gibt. Ein wichtiges Problem ist die Untersuchung der nichteinfachen faktorisierbaren Gruppen, genauer gesagt, die Ermittlung solcher Klassen von Gruppen, die nicht einfach sind. Wir haben bereits über mehrere solche Typen von faktorisierbaren Gruppen gesprochen, die nicht einfach, ja sogar auflösbar sind. Über faktorisierbare Gruppen, die nicht einfach aber auch nicht notwendigerweise auflösbar sind, möchte ich nur ein einziges Ergebnis erwähnen, welches in 1955 bewiesen worden ist [65]: Ist in der faktorisierbaren Gruppe $G = AB$ A eine Abelsche Gruppe und hat B ein echtes Zentrum, und ist weiterhin die Ordnung von A nicht kleiner als diejenige von B, dann ist die Gruppe G nicht einfach. Wahrscheinlich gilt die Behauptung auch ohne der den Ordnungen auferlegten Bedingung, diese Frage ist aber noch offen.

Ich erwähne noch eine in 1950 erschienene Arbeit, die ich gemeinsam mit Rédei [68] verfasst habe. In dieser Arbeit wird gezeigt, dass sich der erwähnte Satz von Ore aus einem verhältnismässig leicht nachweisbaren allgemeinen Struktursatz über faktorisierbare Gruppen leicht gewinnen lässt.

Es ist erwähnenswert noch, dass S. N. Černikov [5, 6, 7, 8] in Verbindung mit der Ausdehnung (für die unendlichen Gruppen) des wohlbekannten Satzes von J. Schur [55] (hat die endliche Gruppe G einen Normalteiler N mit $(|N|, |G/N|) = 1$, dann ist $G = NM$ $(N \cap M = 1)$) mehrere Ergebnisse hat und S. A. Čunichin [10, 11, 12] in Verbindnug mit dem schon erwähnten Ergebnis von P. Hall mehrere Arbeiten hat.

Was die prinzipielle Lösung des Erweiterungsproblems betrifft, haben wir bisher nur über die Arbeiten von Zappa und Casadio gesprochen. Die allgemeine Lösung des Erweiterungsproblems für den Fall zweier Faktoren (wobei bezüglich des Durchschnitts keinerlei Voraussetzung gemacht wird) behandeln wir in einer 1955 erschienenen, mit Rédei [50] gemeinsam verfassten Arbeit. Die Lösung wird auch in diesem Falle durch vier Funktionalgleichungen geliefert.

Nach der prinzipiellen Lösung des Erweiterungsproblems für faktorisierbare Gruppen ist die Frage aufgetreten, ob es nicht möglich wäre, für zwei Gruppen ein Erweiterungsproblem zu formulieren und natürlich auch zu lösen, welches sowohl das Zappasches als auch das Schreiersches Erweiterungsproblem umfassen würde. Diese Frage ist in 1950 durch eine Arbeit von Rédei [48] gelöst worden, in welcher er das sogenannte schiefe Produkt zweier Gruppen einführt. Es seien G und Γ zwei beliebige Gruppen mit Elementen $a \in G$ und $\alpha \in \Gamma$. Bezeichnen wir mit $G \circ \Gamma$ das mit Hilfe der Elementenpaare (a, α) gebildetes sog. schiefes Produkt, welches auf folgende Weise definiert wird: $(a, \alpha)(b, \beta) = (a b^{\alpha} \beta^{\alpha}, a^{b} \alpha^{b} \beta)$. Hier sind $b^{\alpha}, \beta^{\alpha} \in G, a^{b}, \alpha^{b} \in \Gamma$ gewisse eindeutige Funktionen. Rédei bestimmt für diese Funktionen die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $G \circ \Gamma$ eine Gruppe sein soll. Das schiefe Produkt $G \circ \Gamma$ wird k-fach entartet genannt, falls von den Relationen $b^{\alpha} = b$, $\beta^{\alpha} = e$, $a^{b} = \varepsilon$, $\alpha^{b} = \alpha$ k identisch erfüllt sind. Im wesentlichen gibt es vier verschiedene zweifach entartete Fälle. Der Schreiersche und der Zappasche Fall gehören zu den zweifach entarteten schiefen Produkten. Die beiden anderen zweifach entarteten Fälle sind in einer 1953 erschienenen Arbeit von R. Kochendörffer [36] eingehend untersucht worden. Auch diese schiefen Produkte lassen sich im wesentlichen auf die Schreiersche und die Zappasche Erweiterungen zurückführen. Es entsteht die Frage, ob das Rédeische scheife Produkt zu irgendeiner solchen Erweiterung führt, die sich aus der Schreierschen und der Zappaschen Erweiterung nicht zusammensetzen lässt. F. Rühs [52] hat in einer 1957 erschienenen Arbeit den einfach entarteten Fall vollkommen erledigt, dabei aber keine neuen Fälle gefunden. Endlich wurde in 1958 der allgemeine Fall von Rühs [53] teilweise, und unabhängig davon, noch in demselben Jahre durch C. M. Tibiletti [74] vollkommen erledigt. Wesentlich neue Erweiterungen sind auch hier nicht entstanden. Das gewonnene Ergebnis lässt sich folgendermassen aussprechen: Ist G eine durch eine schiefes Produkt entstandene Gruppe, so kann G durch zwei seiner Untergruppen auf folgende Weise faktorisiert werden: $G = HK$, $H \cap K = D$ wobei $D = H_1 \times K_1$ ist und H_1 bzw. K_1 Normalteiler von H bzw. K sind.

Neuerdings ist es gelungen, die Lösung des Schreierschen und des Zappaschen, sowie auch des Casadioschen Erweiterungsproblems aus einem solchen, ganz allgemeinen Erweiterungsproblem herzuleiten, welches bereits sämtliche Gruppen umfasst [66] und von J. Zvonimir [83].

Das Analogon des Problems des Rédeischen schiefen Produktes ist für Gruppen mit Operatoren durch L. Fuchs [15, 16] im Jahre 1952 untersucht worden.

Zusammenfassend können wir feststellen, dass die Untersuchung der faktorisierbaren Gruppen im wesentlichen in drei Richtungen fortschreitet. Erstens strukturelle Untersuchungen im engeren Sinne des Wortes, im allgemeinen auf Grund der klassischen Ergebnisse der Gruppentheorie und mit Hilfe klassischer Methoden. Hierher gehören z. B. die Arbeiten von Wielandt. Andere Untersuchungnen zielen darauf hin, das Erweiterungsproblem im Falle konkreter Gruppen explizit zu lösen. Drittens haben wir die Beschreibung faktorisierbarer Gruppen mittels Funktionalgleichungen und die Verwendung dieser Funktionalgleichungen in den beiden anderen Forschungsgebieten.